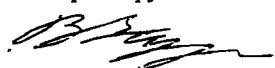


0- 784368

На правах рукописи



**КУЗНЕЦОВ Валентин Константинович**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ  
ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛАМИНАРНЫМ ПОГРАНИЧНЫМ  
СЛОЕМ В СВЕРХЗВУКОВЫХ ПОТОКАХ**

**Специальность: 05.13.18 - математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ**

**АВТОРЕФЕРАТ  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук**

**Казань - 2010**

Работа выполнена в Казанском государственном техническом университете  
им. А.Н. Туполева

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор  
Гарасв Кавас Гарасевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор  
Сидоров Игорь Николаевич

доктор физико-математических наук, профессор  
Кирпичников Александр Петрович

Ведущая организация: Научно-исследовательский институт математики  
и механики им. Н.Г. Чеботарева Казанского  
(Приволжского) федерального университета

Защита состоится 29 ОКТЯБРЯ 2000 г. в 14 часов на заседании  
диссертационного совета Д 212.079.01 в Казанском государственном  
техническом университете им. А.Н. Туполева по адресу: 420111, г. Казань, ул.  
К.Маркса, 10.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Казанского  
государственного технического университета им. А.Н. Туполева. Автореферат  
диссертации размещен на сайте КГТУ им. А.Н.Туполева [www.kai.ru](http://www.kai.ru).

Автореферат разослан 31 АВГУСТА 2010 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
доктор физико-математических наук,  
профессор



П.Г. Данилаев



## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Работа посвящена решению задачи оптимального управления ламинарным пограничным слоем при сверхзвуковом обтекании пористого тела посредством вдува газа в ламинарный пограничный слой.

Основными задачами теории пограничного слоя, имеющими практическую значимость, являются задачи о минимизации сопротивления, возникающего при обтекании тела вследствие трения жидкости о поверхность тела и теплового потока между телом и обтекаемой жидкостью.

Одним из способов, позволяющих влиять на характеристики пограничного слоя, является вдув газа. Последний используется как средство уменьшения трения и теплопередачи. С увеличением скорости вдува в направлении нормали к стенке тела напряжение трения в пограничном слое уменьшается. При этом, если интенсивность вдува невелика, сохраняются основные допущения теории пограничного слоя.

При решении практических задач по управлению пограничным слоем возникает необходимость учета различных ограничений на параметры вдува, такие как суммарный расход вдуваемой жидкости или мощность системы управления вдувом, что приводит к постановке вариационной задачи с ограничениями.

Физическое моделирование задач оптимально управляемого пограничного слоя сопряжено с определенными трудностями, связанными с вычислением распределенных и интегральных характеристик пограничного слоя в условиях аэродинамического эксперимента, и не позволяет реализовать различные состояния пограничного слоя в отличие от численных и аналитических методов.

Пионерская постановка задачи об оптимальном управлении ламинарным пограничным слоем принадлежит профессору Т.К. Сиразетдинову. В дальнейшем в работах К.Г. Гараева было показано, что эта задача принадлежит к классу инвариантных вариационных задач типа Майера, и с помощью инфинитезимального аппарата Ли-Овсянникова и теории инвариантных вариационных задач Э. Нетер было доказано существование первого интеграла

в ряде задач по оптимальному управлению пограничным слоем. Этот интеграл в дальнейшем был использован (работы А.А. Афанасьева, Ж.Ж. Жанабекова, А.Т. Лукьянова, Н.Г. Бильченко, В.А. Овчинникова, Д.М. Осадчей и др.) для решения широкого круга задач дозвукового, а также сверхзвукового обтекания. Последний класс задач, однако, рассматривался значительно реже. Среди решенных задач этого класса можно выделить задачу об оптимальном охлаждении пористой криволинейной стенки и рассмотренные в приближенной постановке (в рамках аппроксимирующей системы) задачи о минимизации сопротивления трения для частных случаев обтекания клина и кругового конуса. В качестве ограничения в этих задачах выступала мощность системы управления вдувом, а для решения системы уравнений пограничного слоя применялся метод обобщенных интегральных соотношений А.А. Дородницына.

Выбор метода обобщенных интегральных соотношений для решения указанных задач преимущественно определялся тем, что для небольших номеров приближений этот метод характеризуется сравнительно низкими требованиями к вычислительным ресурсам. Однако, увеличение точности данных, полученных с его использованием, реализуется либо за счет "удачного" подбора системы базисных функций (выбор которых носит эвристический характер), либо за счет увеличения номера приближения (числа полос). Причем последнее приводит к весьма значительному росту трудоемкости расчетов.

В связи с существующей тенденцией к увеличению доступных вычислительных мощностей, актуальной является разработка методов поиска оптимальных управлений, основанных на сеточных методах. Кроме того, для дальнейшего развития теории оптимального управления пограничным слоем и расширения области применения её результатов в инженерной практике необходимо введение в рассматриваемые вариационные задачи дополнительных (помимо мощности системы управления) ограничений.

**Цель работы.** Целью диссертационной работы является разработка эффективных алгоритмов построения распределений скорости вдува в ламинарный пограничный слой, обеспечивающих минимальное значение либо функционала суммарного дьюновского трения, действующего на обтекаемое

тело, либо функционала суммарного теплового потока, передаваемого от газа к обтекаемой поверхности, при сверхзвуковых режимах обтекания.

**Методы исследования.** В работе использовались: теория ламинарного пограничного слоя; методы вариационного исчисления и оптимального управления; инфинитезимальный аппарат Ли-Овсянникова; методы численного решения алгебраических и дифференциальных уравнений.

**Достоверность** результатов работы обеспечивается использованием известных математических моделей и корректным применением апробированных аналитических и численных методов. Адекватность предложенных моделей подтверждается близостью численных и аналитических решений. Результаты расчетов, полученных с использованием разработанных алгоритмов, согласуются с результатами исследований других авторов.

#### **Научная новизна работы.**

- Вариационная задача о поиске распределения скорости нормального вдува, обеспечивающего минимальное значение суммарного ньютоновского сопротивления трения при обтекании сверхзвуковым потоком цилиндрических тел и тел вращения, рассмотрена в рамках точных уравнений пограничного слоя типа Прандтля для произвольных чисел Прандтля.

- На основе конечно-разностного метода построен алгоритм решения задач оптимального управления ламинарным пограничным слоем при сверхзвуковом обтекании.

- Поставлены (в рамках аппроксимирующей системы) и решены задачи управления ламинарным пограничным слоем с учетом ограничений не только на мощность системы управления вдувом, но и на суммарный расход вдуваемого газа и скорость вдува.

**Практическая значимость** результатов диссертационной работы состоит, *во-первых*, в разработке алгоритмов, методик и комплекса программ, позволяющих моделировать процесс управления ламинарным пограничным слоем и строить оптимальные законы распределения скоростей вдува; *во-вторых*, в получении приближенных аналитических решений, предназначенных для использования непосредственно в инженерной практике.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях и семинарах: международной молодежной научной конференции «Туполевские чтения XIV» (г. Казань, 2006 г.); международной молодежной научной конференции «Туполевские чтения XV» (г. Казань, 2007 г.); всероссийском семинаре по аналитической механике, устойчивости и управлению движениям, посвященном столетию Аминова М. Ш. (г. Казань, 2008 г.); всероссийском семинаре по аналитической механике, устойчивости и управлению движениям, посвященном столетию П. А. Кузьмина (г. Казань, 2008 г.); XXVIII Российской школе по проблемам науки и технологий (г. Миасс, 2008 г.); международной научно-практической конференции «Современные достижения в науке и образовании: математика и информатика», посвященной 300-летию со дня рождения М.В. Ломоносова (г. Архангельск, 2010 г.).

**Публикации.** По теме диссертации опубликованы 9 научных работ, включая 3 статьи в журналах, рекомендованных ВАК и 6 тезисов докладов в трудах и материалах международных и всероссийских конференций. Разработанная автором программа по построению оптимальных законов вдува зарегистрирована в Отраслевом фонде электронных ресурсов «Наука и образование» и Федеральном государственном научном учреждении "Центр информационных технологий и систем органов исполнительной власти".

Автор является дипломантом конкурса научных работ по присуждению именных стипендий Главы Администрации г. Казани по итогам 2006 г.

**Результаты работы, выносимые на защиту:**

- Алгоритм построения оптимальных управлений для цилиндрических тел и тел вращения на основе конечно-разностного метода и инвариантно-групповых решениях ранга единицы.
- Аналитические формулы для определения оптимальных управлений в первом приближении в задачах о минимизации сопротивления трения при обтекании прямого кругового цилиндра, клина, кругового конуса и сферы.

- Структура оптимального управления в окрестности точки торможения, полученная с использованием метода разложений в ряды.

- Постановка, необходимые условия оптимальности и алгоритм решения оптимальной задачи об управлении ламинарным пограничным слоем с учетом ограничений на мощность системы управления вдувом, суммарный расход вдуваемого газа и скорость вдува.

- Комплекс программ, реализующий предложенные методы и алгоритмы.

**Структура и объем диссертационной работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, библиографического списка использованной литературы и приложений. Работа изложена на 137 страницах основного текста, приложения содержат 6 таблиц и 7 графиков; библиография включает 155 наименований.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, дан обзор литературы по теме исследования, определены цели и задачи исследования, приведена структура диссертации.

В первой главе рассматривается задача оптимального управления ламинарным пограничным слоем для случая обтекания цилиндрических тел сверхзвуковым потоком вязкого совершенного газа с учетом ограничения на мощность системы управления вдувом. В качестве минимизируемого функционала выступает ньютоновское трение.

В разделе 1.1 дается постановка вариационной задачи. Уравнения ламинарного пограничного слоя и граничные условия к ним берутся в виде

$$\begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= - \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right); \quad \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho g) = 0; \\ \rho \left( u \frac{\partial H}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial y} \right) &= \frac{1}{Pr} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \left( 1 - \frac{1}{Pr} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right); \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$p = \rho RT, \quad \mu = \mu_{\infty} \tau b(\tau)$$

$$\begin{aligned} u &= 0, g = (m/\rho)_{\infty}, \quad H = H_{\infty}(x) \quad (y=0, x>0), \\ u &\rightarrow u_{\infty}(x), \quad H \rightarrow H_{\infty}(x) \quad (y \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь ось  $x$  направлена вдоль контура тела, ось  $y$  – перпендикулярна оси  $x$  по направлению внешней нормали;  $u, g$  – проекции вектора скорости на координатные оси;  $p$  – давление;  $\rho, \mu$  и  $T$  – плотность, вязкость и температура газа;  $H = C_p T + u^2/2$  – полная энтальпия;  $C_p$  – теплоемкость при постоянном давлении;  $R$  – газовая постоянная;  $\text{Pr}$  – число Прандтля;  $\tau = T/T_\infty$  – безразмерная температура;  $m_w = (\rho g)_w$  – массовый расход вдуваемого газа (того же состава, что и в набегающем потоке) за единицу времени. Индекс "e" соответствует параметрам газа на внешней границе пограничного слоя, "w" – на стенке, "o" – в точке полного торможения потока.

Здесь и далее используются принятые в теории пограничного слоя обозначения. С использованием замены переменных, основанной на преобразованиях А.А. Дородницына

$$\begin{aligned} s &= \int_0^x q dx, \quad t = \frac{u_e \eta}{\sqrt{V_\infty V_\infty l}}, \quad \eta = \int_0^y \frac{(1 - \alpha_e^2)^{1/2}}{\tau} dy, \quad \bar{u} = \frac{u}{u_e}, \quad \psi = 1 - \tau - \alpha_e^2 \bar{u}^2, \quad \bar{x} = \frac{x}{l}, \\ w &= \sqrt{\frac{V_\infty l}{V_\infty}} \left[ (1 - \alpha_e^2)^{1/2} \bar{u} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{g}{u_e} \right] + \frac{\dot{u}_e \bar{u}}{u_e}, \quad \beta = \frac{\dot{\alpha}_e}{\alpha_e (1 - \alpha_e^2)}, \quad \alpha_e = \frac{u_e}{V_\infty}, \quad \alpha = \frac{u}{V_\infty}, \\ m &= \frac{(\rho g)_w}{\rho_\infty} \sqrt{\frac{l}{V_\infty V_\infty}}, \quad q = \alpha_e (1 - \alpha_e^2)^{1/2}, \quad \dot{\alpha}_e = \frac{d\alpha_e}{ds}, \quad \dot{u}_e = \frac{du_e}{ds}, \quad V_\infty = V_\infty \sqrt{1 + \frac{2}{(\gamma - 1)M_\infty^2}}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

система (1.1) и условия (1.2) приводятся, соответственно, к виду

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial s} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= \beta (1 - \psi - \bar{u}^2) + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \\ \bar{u} \frac{\partial \psi}{\partial s} + \bar{w} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + 2\alpha_e^2 \left( \frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right)^2 + \bar{u} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right]. \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \bar{u} &= 0, \quad w = m(s)/q(s), \quad \psi = 1 - \tau_w \quad (t = 0), \\ \bar{u} &\rightarrow 1, \quad \psi \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (1.5)$$

При выводе системы (1.4) предполагается линейная зависимость вязкости от температуры, а также постоянство безразмерной температуры газа  $\tau_\infty$ , которое можно достичь, например, профилированием внутреннего контура стенки. В дальнейшем для простоты черточку над  $u$  опустим.



На участке вдува  $[0; s_*$ ] единичной ширины мощность системы управления, рассчитанная с помощью закона Дарси, и функционал ньютоновского трения в новых переменных записываются в виде

$$N = \int_0^{s_*} \frac{\tau_w^2 m^2}{\alpha_* (1 - \alpha_*^2)^{3/2}} ds, \quad (1.6)$$

$$X_T = \int_0^{s_*} \alpha_* \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} ds. \quad (1.7)$$

Требуется среди непрерывных управлений  $m(\bar{x})$  найти такое, которое минимизирует значение функционала (1.7) при заданном ограничении на мощность системы управления (1.6) и условиях (1.4), (1.5).

В разделе 1.2 приводятся автомодельные решения системы (1.1). Предлагается метод нахождения её решений в малой окрестности начала координат в виде многочленов:

$$u = \sum_{i=0}^N u_i(z) s^{i/2}, \quad \psi = \sum_{i=0}^N \psi_i(z) s^{i/2}, \quad (1.8)$$

где  $z = t/\sqrt{s}$ , а функции  $u_i, \psi_i$  являются решениями системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

В разделе 1.3 для поставленной вариационной задачи приводятся условия оптимальности: записываются уравнения Эйлера-Лагранжа-Остроградского

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial t^2} + u \frac{\partial \lambda_1}{\partial s} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial s} + w \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial w}{\partial t} + 2\alpha_*^2 \left( \frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) u \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial t^2} - 2\beta u \lambda_1 - \lambda_3 \frac{\partial \psi}{\partial s} &= 0, \\ \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} + \lambda_3 \frac{\partial \psi}{\partial t} &= 0; \quad \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 \lambda_3}{\partial t^2} + \frac{\partial \lambda_3}{\partial t} w + \frac{\partial \lambda_3}{\partial s} u - \beta \lambda_1 &= 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

из условий трансверсальности выводятся граничные условия для сопряженной системы

$$\begin{aligned} \lambda_1(s, 0) &= -\alpha_*, \quad \lambda_3(s, 0) = 0 \quad (t = 0, s < s_*) \\ \lambda_1 &\rightarrow 0, \quad \lambda_2 \rightarrow 0, \quad \lambda_3 \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty) \\ \lambda_1 &= \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \quad (s = s_*) \end{aligned} \quad (1.10)$$

и формула для определения оптимального управления

$$m = \frac{\lambda_3(s, 0)}{2\alpha_0 q f (1 - \psi_w)^2} = \lambda_2(s, 0) \frac{(1 - \alpha_*^2)^{3/2}}{2\tau_w^2 \alpha_0}. \quad (1.11)$$

Для рассматриваемой задачи записывается первый интеграл оптимально управляемого пограничного слоя

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} \left[ \frac{1}{Pr} \frac{\partial \psi}{\partial t} - 2\alpha_*^2 \left( 1 - \frac{1}{Pr} \right) u \frac{\partial u}{\partial t} \right] + \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \lambda_2}{\partial s} + \lambda_2 \left[ 2\alpha_*^2 \left( 1 - \frac{1}{Pr} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left( u \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \right. \\ & \left. + w \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right] + \lambda_1 \left[ w \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Во второй главе предлагается алгоритм решения поставленной вариационной задачи на основе метода сеток.

В разделе 2.1 с использованием первого интеграла производится понижения порядка сопряженной системы, которая принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial t^2} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} \left[ \left( \frac{1}{Pr} - 1 \right) \frac{\partial \psi}{\partial t} - 2\alpha_*^2 \left( 1 - \frac{1}{Pr} \right) u \frac{\partial u}{\partial t} \right] + \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} \left[ w - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} \right] + \\ & + \lambda_2 \left[ 2 \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} - \left( 1 + \frac{1}{Pr} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + 2\alpha_*^2 \left( 1 - \frac{1}{Pr} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left( u \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right] + \frac{\partial \lambda_2}{\partial s} u = 0; \\ & \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial t^2} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} w + \frac{\partial \lambda_2}{\partial s} u - \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} \beta \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial \psi}{\partial t} \beta \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \end{aligned}$$

Излагается итерационный метод построения оптимальных управлений, основанный на методе типа Пикара или метода последовательного спуска.

В разделе 2.2 записываются автомодельные решения сопряженной системы, справедливые в малой окрестности нуля. Показывается, что для затупленного тела при  $Pr=1$  оптимальное управление в первом приближении алгоритма Пикара в окрестности  $x=0$  пропорционально  $x$ .

Показывается также, что если управление  $m^{(i)}$  на  $i$ -ой итерации алгоритма поиска оптимального управления в малой окрестности точки торможения разлагается в ряд по степеням  $\sqrt{s}$ , то оптимальное управление  $m^{(i+1)}$  на  $(i+1)$ -ой итерации также представляется степенным рядом и для затупленного тела  $m^{(i+1)} \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$ .

В разделе 2.3 приводятся разностные схемы для уравнений оптимально управляемого пограничного слоя. Краевая задача (1.8), (1.9) решается численно с использованием трехслойных аппроксимаций второго порядка точности.

Система (1.8) интегрируется вниз по течению; на каждом слое входящие в неё уравнения решаются последовательно. Значения функций на первых двух слоях определяются с использованием разложений, описанных в разделе 1.2 и

ограниченных конечным числом членов, позволяющих гарантировать требуемый порядок погрешности задания начальных условий.

Дискретная форма уравнения движения имеет вид

$$\begin{aligned} a_j^{n+1} u_{j-1}^{n+1} + b_j^{n+1} u_j^{n+1} + c_j^{n+1} u_{j+1}^{n+1} &= d_j, \quad u_1^n = 0, u_{j_{\max}}^n = 1, \\ a_j^{n+1} &= \left[ \frac{w_j^{n+1} - 2w_j^n}{2} - \frac{1}{\Delta t} \right] \frac{\Delta \bar{x}}{\Delta t}, b_j^{n+1} = \frac{1.5(2u_j^n - u_{j-1}^{n+1})}{(q)_{n+1}} + \frac{2\Delta \bar{x}}{\Delta t^2}, c_j^{n+1} = \left[ \frac{2w_j^n - w_{j-1}^{n+1}}{2(q)_{n+1}} - \frac{1}{\Delta t} \right] \frac{\Delta \bar{x}}{\Delta t}, \\ d_j^{n+1} &= (u_j^{n+1} - 2u_j^n)(0.5u_j^{n+1} - 2u_j^n)/(q)_{n+1} + (\beta)_{n+1} \Delta \bar{x} [1 - 2\psi_j^n + \psi_{j-1}^{n+1} - (2u_j^n - u_{j-1}^{n+1})^2] \end{aligned}$$

Переменная  $w$  определяется из рекуррентного соотношения

$$w_1^{n+1} = \frac{m_{n+1}}{q_{n+1}}; w_j^{n+1} = \frac{\Delta t}{2(q)_{n+1} \Delta \bar{x}} \left[ (1.5u_j^{n+1} - 2u_j^n + 0.5u_{j-1}^{n+1}) + (1.5u_{j-1}^{n+1} - 2u_{j-1}^n + 0.5u_{j-2}^{n+1}) \right] + w_{j-1}^{n+1}.$$

Уравнение энергии сводится к следующей алгебраической системе:

$$\begin{aligned} a_j^{n+1} \psi_{j-1}^{n+1} + b_j^{n+1} \psi_j^{n+1} + c_j^{n+1} \psi_{j+1}^{n+1} &= d_j^{n+1}, \quad \psi_1^n = 1 - \tau_w, \psi_{j_{\max}}^n = 0, \\ a_j^{n+1} &= \left[ -\frac{w_j^{n+1}}{2} - \frac{1}{\text{Pr} \Delta t} \right] \frac{\Delta \bar{x}}{\Delta t}, b_j^{n+1} = \frac{1.5u_j^{n+1}}{(q)_{n+1}} + \frac{2\Delta \bar{x}}{\text{Pr} \Delta t^2}, c_j^{n+1} = \left[ \frac{w_j^{n+1}}{2} - \frac{1}{\text{Pr} \Delta t} \right] \frac{\Delta \bar{x}}{\Delta t}, \\ d_j^{n+1} &= 2(\alpha_s^2)_{n+1} \left( \frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) \left[ \frac{(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1})^2}{4} + u_j^{n+1} (u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) \right] \frac{\Delta \bar{x}}{\Delta t^2} - \frac{u_j^{n+1} (0.5\psi_{j-1}^{n+1} - 2\psi_j^n)}{(q)_{n+1}}. \end{aligned}$$

Уравнения Эйлера интегрируются вверх по потоку с использованием неявной разностной схемы второго порядка точности по  $t$  и первого по  $x$ :

$$\begin{aligned} A_j^n \lambda_{2,j+1}^n + B_j^n \lambda_{2,j}^n + C_j^n \lambda_{2,j-1}^n + D_j^n \lambda_{3,j+1}^n + E_j^n \lambda_{3,j}^n + F_j^n \lambda_{3,j-1}^n &= S_j^n \lambda_{2,j}^{n+1}, \\ G_j^n \lambda_{2,j+1}^n + H_j^n \lambda_{2,j-1}^n + I_j^n \lambda_{3,j+1}^n + J_j^n \lambda_{3,j}^n + K_j^n \lambda_{3,j-1}^n &= L_j^n \lambda_{3,j}^{n+1}, \\ \lambda_{2,2}^{n+1} - \lambda_{2,1}^{n+1} &= (-\alpha_s)_{n+1} (u_2^n - u_1^n), \lambda_{2,j_{\max}(n)}^n = \lambda_{3,j}^n = \lambda_{3,j_{\max}(n)}^n = 0, \lambda_{2,j_{\max}}^{n+1} = \lambda_{3,j_{\max}}^{n+1} = 0, \\ A &= \frac{1}{\Delta t} + \left( \frac{w}{2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \frac{\partial u}{\partial t}, B = -\frac{2}{\Delta t} - u \frac{\Delta t}{q \Delta \bar{x}}, C = \frac{1}{\Delta t} - \left( \frac{w}{2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \frac{\partial u}{\partial t}, I = \frac{1}{\Delta t} + \frac{w \text{Pr}}{2}, \\ D &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) \frac{\partial \psi}{\partial t} + \alpha_s^2 \left( \frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right) u \frac{\partial u}{\partial t}, O = -\frac{1}{\Delta t}, S = -u \frac{\Delta t}{q \Delta \bar{x}}, F = -D, M = \frac{1}{\Delta t}, \\ E &= \Delta t \left[ 2 \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} - \left( 1 + \frac{1}{\text{Pr}} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + 2\alpha_s^2 \left( 1 - \frac{1}{\text{Pr}} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left( u \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right], H = -G, \\ G &= -\beta \text{Pr} / \frac{\partial u}{\partial t}, L = -\frac{u \text{Pr} \Delta t}{q \Delta \bar{x}}, J = -\frac{2}{\Delta t} - \frac{u \text{Pr} \Delta t}{q \Delta \bar{x}} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \beta \text{Pr} \Delta t / \frac{\partial u}{\partial t}, K = \frac{1}{\Delta t} - \frac{w \text{Pr}}{2}. \end{aligned}$$

Вышеприведенной системе линейных алгебраических уравнений соответствует блочная трехдиагональная матрица с размером блока  $2 \times 2$ , которая приводится к пятидиагональному виду и решается методом прогонки.

В разделе 2.4 задача оптимального управления пограничным слоем рассматривается для частного случая обтекания клиновидных профилей. Уравнения оптимально управляемого пограничного слоя и, как следствие, конечно-разностные схемы в данном случае имеют более простой вид. Приводятся результаты вычислительного эксперимента.

На рис. 1 представлен оптимальный закон вдува, полученный по описанной схеме последовательных приближений для случая  $M = 3$ ;  $m^{(0)} = 0,1$ ;  $\beta = 3^\circ$ . Линия 1 соответствует постоянному вдуву  $m^{(0)}$ ; кривые 2 и 3, соответственно, оптимальным управлениям в 1-ом и 5-ом приближениях.

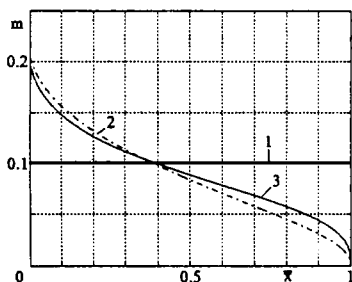


Рис. 1. Распределение скорости вдува в схеме последовательных приближений

Максимальный выигрыш в значении функционала сопротивления трения для оптимальных управлений по сравнению с равномерными законами вдува полученный в процессе вычислительного эксперимента по минимизации трения на клине достигает 25%.

В разделе 2.5 описывается вычислительный эксперимент, проведенный для случая обтекания прямого кругового цилиндра сверхзвуковым потоком воздуха. При расчёте варьировались: значение числа Маха  $M$ , безразмерная температура газа на стенке, мощность системы управления вдуваемого газа.

Поиск оптимального управления проводился комбинированным способом: в нулевом приближении задавался постоянный вдув, первая итерация вычислялась по методу Пикара, все последующие — по методу последовательного спуска. Стоит подчеркнуть, что метод последовательного спуска для всех рассмотренных случаев обеспечивал монотонную сходимость итераций алгоритма, в то время как при использовании для расчета управлений на всех итерациях алгоритма Пикара сходимость не обнаруживалась. На рис. 2 представлен оптимальный закон вдува, полученный по схеме

последовательных приближений для случая:  $M = 7, m^{(0)} = 0.3, r_w = 0.2$ .

Обозначения на рис. 2 совпадают с обозначениями рис. 1.

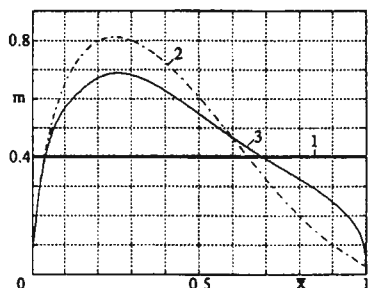


Рис. 2. Распределение скорости вдува в схеме последовательных приближений

Максимальный полученный выигрыш в значении функционала сопротивления трения составил 65 %.

Анализ полученных данных позволяет выявить, что выигрыш увеличивается: с увеличением мощности системы управления; с ростом числа Маха; с уменьшением температурного фактора.

В разделе 2.6 с использованием полученных в текущей главе разностных схем решается задача о минимизации суммарного теплового потока передающегося от пограничного слоя к криволинейной цилиндрической стенке. Эта задача решалась ранее с использованием для интегрирования систем уравнений в частных производных метода обобщенных интегральных соотношений А.А. Дородницына. Проводится сравнение ранее полученных оптимальных управлений с управлениями, полученными конечно-разностным методом.

В третьей главе задача об оптимальном управлении ламинарным пограничным слоем рассматривается в рамках аппроксимирующей системы уравнений ламинарного пограничного слоя. В качестве ограничений выступают: мощность системы управления вдувом, суммарный расход вдуваемого газа и скорость вдува.

Аппроксимирующая система представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, полученную из исходных уравнений ламинарного пограничного слоя по методу обобщенных интегральных соотношений А. А. Дородницына. Погрешность вычисления характеристик пограничного слоя в данном случае не превышает 2%. Замена в алгоритме систем дифференциальных уравнений в частных производных аппроксимирующими системами позволяет значительно повысить

эффективность алгоритма поиска оптимальных управлений при незначительной для пилотных исследований потере точности вычислений. Кроме того, в ряде частных случаев анализ аппроксимирующих систем позволяет получать приближенные формулы для определения оптимальных управлений в аналитическом виде.

В разделе 3.1 вводится аппроксимирующая система второго приближения уравнений ламинарного пограничного слоя:

$$\begin{aligned}\theta'_0 &= 18m - 6\beta q \left( \frac{7\theta_1}{6} + \frac{9\theta_0}{6} - \frac{5\omega_1}{3} - \frac{4k\theta_0}{3} \right) - \frac{32q}{\theta_1} + \frac{34q}{\theta_0}; \\ \theta'_1 &= 12m - 12\beta q \left( \frac{\theta_0}{3} + \frac{\theta_1}{2} - \frac{2\omega_1}{3} - \frac{k\theta_0}{3} \right) - \frac{16q}{\theta_1} + \frac{20q}{\theta_0};\end{aligned}\quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}\omega'_1 &= 6mk - 6\beta q \left( \frac{k\theta_0}{6} + \frac{\omega_1}{2} - \frac{2\omega_1^2}{3\theta_1} - \frac{k^2\theta_0}{6} \right) + \frac{6kq}{\theta_0} + 6q \left( 1 + \frac{1}{\text{Pr}} \right) \times \\ &\times \left[ \frac{1}{6\theta_0} \left( 4 \frac{\omega_1}{\theta_1} - 3k \right) - \frac{2k}{3\theta_1} \right] - \frac{6q}{\text{Pr}\theta_0} \left( 4 \frac{\omega_1}{\theta_1} - 3k \right) + \frac{4qa_e^2}{\theta_1} \left( \frac{1}{\text{Pr}} - 1 \right).\end{aligned}$$

$$\theta_0(0) = \theta_1(0) = \omega_1(0) = 0. \quad (3.2)$$

Функционалы сопротивления трения, мощности системы управления вдувом и суммарным расходом в новых переменных записываются, соответственно, в виде:

$$X_{rp} = \int_0^{\bar{x}} \frac{\alpha_*^2 (1 - \alpha_*^2)^{1/\gamma-1}}{\theta_0} d\bar{x}, \quad (3.3)$$

$$N = \int_0^{\bar{x}} (1 - \alpha_*^2)^{1/\gamma-1} m^2 d\bar{x}, \quad (3.4)$$

$$V = \int_0^{\bar{x}} m d\bar{x}. \quad (3.5)$$

В рамках данной системы дается приближенная постановка рассматриваемой задачи: среди кусочно-непрерывных управлений  $m$  требуется найти такое, которое доставляет минимальное значение функционалу сопротивления трения (3.3) при заданных ограничениях на мощность системы управления (3.4), суммарный расход вдуваемого газа (3.5), ограничения на скорость вдува  $0 \leq m \leq M$  и условиях (3.1), (3.2).

В разделе 3.2 для получения необходимых условий оптимальности применяется принцип максимума Понтрягина.

Сопряженная система запишется в виде

$$\begin{aligned}
 \lambda'_{11} &= -\frac{\alpha_0^2(1-\alpha_0^2)^{1/r-1}}{\theta_0^2} + \lambda_1(\bar{x})\left[9\beta q - 8k\beta q + \frac{34q}{\theta_0^2}\right] + \lambda_2(\bar{x})\left[4\beta q - 4k\beta q + \frac{20q}{\theta_0^2}\right] + \\
 &+ \lambda_2(\bar{x})\left[\beta q k - \beta q k^2 + \frac{6kq}{\theta_0^2} + \frac{q}{\theta_0^2}\left(1 + \frac{1}{Pr}\right)\left(4\frac{\omega_1}{\theta_1} - 3k\right) - \frac{6q}{Pr\theta_0^2}\left(4\frac{\omega_1}{\theta_1} - 3k\right)\right]; \\
 \lambda'_{21} &= \lambda_1(\bar{x})\left[7\beta q - \frac{32q}{\theta_1^2}\right] + \lambda_2(\bar{x})\left[6\beta q - \frac{16q}{\theta_1^2}\right] + \lambda_3(\bar{x})\left[\frac{4\omega_1^2\beta q}{\theta_1^2} + \right. \\
 &+ \left.q\left(1 + \frac{1}{Pr}\right)\frac{4\omega_1}{\theta_0\theta_1^2} - q\left(1 + \frac{1}{Pr}\right)\frac{4k}{\theta_1^2} - \frac{24q\omega_1}{Pr\theta_0\theta_1^2} + \frac{4qa_0^2}{\theta_1^2}\left(\frac{1}{Pr} - 1\right)\right]; \\
 \lambda'_{12} &= \lambda_1(\bar{x})[-10\beta q] + \lambda_2(\bar{x})[-8\beta q] + \\
 &+ \lambda_3(\bar{x})\left[3\beta q - \frac{8\omega_1\beta q}{\theta_1} - \frac{4q}{\theta_0\theta_1}\left(1 + \frac{1}{Pr}\right) + \frac{24q}{Pr\theta_0\theta_1}\right]; \\
 \alpha'_{02} &= 0, \quad \alpha'_{12} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Из условий трансверсальности следует:

$$\lambda_1(\bar{x}_*) = \lambda_2(\bar{x}_*) = \lambda_3(\bar{x}_*) = 0. \tag{3.7}$$

При наличии в постановке задачи всех трех ограничений условие максимума можно представить в виде

$$m = \begin{cases} 0, & (\alpha_0 < 0 \text{ и } \Psi \leq 0) \text{ или } (\alpha_0 > 0 \text{ и } \Psi < M/2), \\ \Psi, & (\alpha_0 < 0 \text{ и } 0 < \Psi < M), \\ M, & (\alpha_0 < 0 \text{ и } \Psi \geq M) \text{ или } (\alpha_0 > 0 \text{ и } \Psi \geq M/2), \end{cases} \tag{3.8}$$

где  $\Psi = -\frac{\Phi + \alpha_1}{2\alpha_0(1-\alpha_0^2)^{1/r-1}}$ ,  $\Phi(\bar{x}) = 18\lambda_1 + 12\lambda_2 + 6k\lambda_3$ . При отсутствии ограничения на

суммарный расход  $\alpha_1 = 0$ .

Процедура поиска оптимального управления заключается в выборе для каждой точки интервала  $[0, \bar{x}_*]$  значения  $m$  по формуле (3.8), совместно с интегрированием систем (3.1), (3.6). Константы  $\alpha_0, \alpha_1$  при этом определяются из изопериметрических условий (3.4), (3.5).

Так как исходная система имеет особенность в точке  $\bar{x} = 0$ , то для её численного интегрирования граничные условия необходимо задавать на некотором отдалении от нуля:

$$\theta_0(\varepsilon) = \tilde{\theta}_0(\varepsilon), \theta_1(\varepsilon) = \tilde{\theta}_1(\varepsilon), \omega_1(\varepsilon) = \tilde{\omega}_1(\varepsilon), \quad (3.9)$$

где  $\varepsilon$  – достаточно близкая к нулю величина,  $\tilde{\theta}_0(\bar{x}), \tilde{\theta}_1(\bar{x}), \tilde{\omega}_1(\bar{x})$  – аппроксимации, справедливые в малой окрестности нуля, вывод которых для случаев обтекания клина и цилиндра дается в настоящей главе.

Поиск оптимального управления в виде алгоритма Пикара происходит по следующей схеме:

1. Задается некоторое начальное управление  $m^{(0)}(\bar{x})$ , удовлетворяющее ограничениям.

2. Интегрируется система (3.1) с граничными условиями (3.9).

3. Интегрируется система (3.6) с начальными условиями (3.7).

4. Вычисляется функция  $\Phi(\bar{x})$ ; пусть  $\Pi(\bar{x}, \alpha_0, \alpha_1)$  – функция, определенная в соответствии с условием (3.8), тогда задача определения констант  $\alpha_0, \alpha_1$  сводится к задаче отыскания нулей вектор-функции

$$\left( \int_0^{\bar{x}} (1 - \alpha_1^2)^{2/\gamma-1} \Pi^2(\bar{x}, \alpha_0, \alpha_1) d\bar{x} - \bar{N}, \int_0^{\bar{x}} \Pi(\bar{x}, \alpha_0, \alpha_1) d\bar{x} - \bar{V} \right), \quad \text{где } \bar{N}, \bar{V} - \text{значения}$$

ограничений. Как показывается в настоящей главе, для ряда частных случаев, эта задача эквивалентна решению системы алгебраических уравнений. После отыскания решений  $\alpha_0^*, \alpha_1^*$ , определяется оптимальное управление в первом приближении:  $m^{(0)}(\bar{x}) = \Pi(\bar{x}, \alpha_0^*, \alpha_1^*)$ .

5. Цикл заканчивается при обнаружении практической сходимости значений функционала (3.3), либо повторяется с пункта 2.

В разделе 3.3 рассматривается случай обтекания прямого кругового цилиндра. Для задачи без ограничения на скорость вдува выводится приближенное аналитическое решение в виде 
$$m = - \frac{a_1 \bar{x}^{\bar{h}} + a_2 \bar{x}^{\bar{h}} + a_3 \bar{x}^{\bar{h}} + a_4 \bar{x} + \alpha_1}{\alpha_0 (1 - \alpha_1^2)^{2/\gamma-1}}$$

(константы  $a_1, b_1, \alpha_0, \alpha_1$  находятся из системы алгебраических уравнений).

Приводятся результаты вычислительного эксперимента. Разница в значениях целевого функционала для управлений, полученных по аналитической формуле, и для предельных оптимальных управлений не превышает 10%.



Показывается, что оптимальное управление может иметь не более четырех точек переключения.

В разделе 3.4 рассматривается случай обтекания клиновидных профилей. Условия для определения констант  $\alpha_0, \alpha_1$  сводятся к одному уравнению. Для задачи без ограничения на скорость вдува выводится приближенное аналитическое управление в виде  $m = \frac{0,597\bar{x}^{1,99} - 0,097\bar{x}^{0,5} + 0,5 + \alpha_1}{\alpha_0 q} \quad (\bar{x}_1 = 1)$ .

Приводятся результаты вычислительного эксперимента. Показывается, что оптимальное управление может иметь не более двух точек переключения. Описывается комбинированный способ поиска оптимальных управлений: для определения характеристик пограничного слоя решается аппроксимирующая система, для определения оптимального управления – уравнения Эйлера интегрируются методом сеток.

В разделе 3.5 с использованием метода обобщенных интегральных соотношений выводится аппроксимирующая система второго приближения для сопряженной системы (1.9), которая может использоваться для анализа поведения оптимальных управлений.

В четвертой главе рассматривается задача управления ламинарным пограничным слоем при обтекании тел вращения.

В разделе 4.1 дается постановка вариационной задачи. Уравнения ламинарного пограничного слоя на теле вращения и граничные условия к ним берутся в виде

$$\begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{dPe}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right); \frac{\partial}{\partial x} (\rho u r) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho g r) = 0; \\ \rho \left( u \frac{\partial H}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial y} \right) &= \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \left( 1 - \frac{1}{Pr} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right); \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$Pe = \rho RT; \mu = \mu_\infty \varpi(\tau)$$

$$\begin{aligned} u = 0, \quad g = \frac{(\rho V_\infty)}{\rho_\infty}, \quad H = H_\infty \quad (y = 0); \\ u \rightarrow U_\infty(x), \quad H \rightarrow H_\infty(x) \quad (y \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Ньютоновское трения, испытываемое телом вращения, и мощность системы управления определяются по формулам

$$X_{rp} = 2\pi \int_0^1 r \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} d\bar{x}, \quad N = 2\pi \alpha \int_0^1 r g_s^2 dx.$$

Вариационная задача ставится аналогично случаю обтекания цилиндрических тел.

Как известно, с помощью преобразований Степанова-Манглер-Дородницына

$$\xi = \int_0^x (1 - \alpha_s^2)^{\frac{1}{(r-1)}} r^2 dx, \quad \eta = \int_0^y \frac{(1 - \alpha_s^2)^{\frac{1}{(r-1)}}}{r} dy,$$

система уравнений (4.1) приводится к системе, совпадающей по форме с системой уравнений ламинарного пограничного слоя на цилиндрических телах. Поэтому для решения поставленной задачи может быть применен алгоритм, предложенный во второй главе.

В разделе 4.2 аналогично плоскому случаю для осесимметричных тел дается приближенная постановка задачи. Записывается аппроксимирующая система второго приближения для уравнений ламинарного пограничного слоя на телах вращения. С использованием формализма Лагранжа выводятся необходимые условия оптимальности: записывается сопряженная система, граничные условия к ней и формула для определения оптимальных управлений.

В разделе 4.3 задача рассматривается для случая обтекания кругового конуса. В данном случае расчетные системы уравнений принимают более простой вид. В рамках аппроксимирующей задачи выводится уточненная аналитическая формула для определения оптимального управления в первом приближении. Проводятся результаты вычислительного эксперимента.

В разделе 4.4 описывается вычислительный эксперимент по построению оптимальных законов вдува при обтекании сферы. Вычислительный эксперимент проводится аналогично случаю обтекания прямого кругового цилиндра.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. В рамках уравнений типа Прандтля решена задача оптимального управления ламинарным пограничным слоем в плоском и осесимметричном

случаях при сверхзвуковых режимах обтекания. В качестве целевого функционала выступает либо суммарное ньютоновское трение, либо интегральный тепловой поток, передающийся от пограничного слоя к стенке; в качестве изопериметрического условия – мощность системы управления вдувом, рассчитанная с использованием фильтрационного закона Дарси.

2. Разработан метод интегрирования уравнений оптимально управляемого сверхзвукового пограничного слоя на проницаемой поверхности, основанный на методе сеток и инвариантно-групповых решениях ранга единицы. Получены асимптотики оптимальных управлений при стремлении к точке торможения потока, и показана их конечность для клина и кругового цилиндра.

3. Поставлена и решена с использованием принципа максимума Понтрягина задача оптимального управления пограничным слоем при учете трех ограничений (мощность системы управления вдувом, суммарный расход вдуваемого газа и скорость вдува), получены необходимые условия оптимальности, разработан алгоритм решения. Получены приближенные формулы для определения оптимальных управлений в аналитическом виде для случаев обтекания прямого кругового цилиндра, клина, кругового конуса, сферы.

4. На основе предложенных в работе алгоритмов, разработан комплекс программ, для определения управляющего воздействия – удельного расхода вдуваемого газа.

5. С использованием данного комплекса проведены вычислительные эксперименты по управлению ламинарным пограничным слоем на клине, прямом круговом цилиндре, конусе и шаре, построены оптимальные управления и рассчитаны характеристики пограничного слоя.

## **СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

### **В изданиях, рекомендованных ВАК:**

1. Кузнецов В.К. Об оптимальном вдуве в пограничный слой в сверхзвуковом потоке на проницаемом цилиндре // Журнал Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева, 2006. № 2. С. 43-45.

2. Кузнецов В.К. К задаче оптимизации управления ламинарным пограничным слоем на круговом цилиндре // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника, 2007. № 2. С. 14-18.

3. Кузнецов В.К. Оптимальное управление ламинарным пограничным слоем на клине в сверхзвуковом потоке. // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева, 2009. № 2. С. 42-45.

**В других журналах и материалах научно-технических конференций:**

4. Кузнецов В.К. Оптимально управляемый пограничный слой в сверхзвуковом потоке // XIV Туполевские чтения: Международная молодежная научная конференция, 10-11 ноября 2006 года: Материалы конференции. Т. II. Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та. 2006. С. 246-248.

5. Кузнецов В.К. Об одной задаче оптимального управления пограничным слоем // XV Туполевские чтения: Международная молодежная научная конференция, 9-10 ноября 2007 года: Материалы конференции. Т. II. Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та. 2007. С. 84-86.

6. Кузнецов В.К. Оптимально управляемый пограничный слой на проницаемых клиньях при сверхзвуковых режимах течения // Материалы всероссийского семинара «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением», посвященного столетию Аминова Монгима Шакуровича, Казань, 2008. С. 40-41.

7. Кузнецов В.К. Принцип максимума в задаче оптимального управления пограничным слоем в сверхзвуковом потоке // Материалы всероссийского семинара «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением», посвященного столетию Кузьмина Павла Алексеевича, Казань, 2008. С. 72-73.

8. Кузнецов В.К. Применение конечно-разностного метода в задаче минимизации трения на клине // Наука и технологии. Секция 2. Аэрогидродинамика и тепломассообмен. – Краткие сообщения XXVIII Российской школы. – Екатеринбург УрО РАН, 2008. С. 15-17.

9. Кузнецов В.К. Разностные схемы для уравнений оптимально управляемого пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Современные достижения в науке и образовании: математика и информатика: материалы

международной научно-практической конференции, Архангельск, 1-5 февраля 2010 г. / Федер. агентство по образованию, Ком. по науке и проф. образованию Арханг. обл., Помор. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова. – Архангельск : КИРА, 2010. С. 264-267.

**Свидетельства о регистрации программы для ЭВМ:**

10. *Кузнецов В.К.* Программа FRMIP 1.0 для расчета оптимального распределения скорости вдува в ламинарный пограничный слой при сверхзвуковом обтекании - М.: ФГНУ "ЦИТИС" – №50200900762 от 03.07.2009.

---

Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Печ.л. 1,25, Усл.печ.л. 1,16, Уч.-изд.л. 1,06.

Тираж 115. Заказ Н 151.

---

Типография Издательства Казанского государственного  
технического университета

420111, Казань, К.Маркса, 10.



10.